

饱和土中桩水平振动引起土层复阻抗分析研究

余俊¹, 尚守平², 李忠³, 任慧²

(1.中南大学 土木建筑学院, 长沙 410075; 2.湖南大学 土木工程学院, 长沙 410082; 3.同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092)

摘要: 基于 Biot 动力固结方程, 研究了饱和土中端承桩在水平振动时产生的土层复阻抗特性。对动力固结方程进行变型, 采用算子分解及分离变量法得到简谐稳态水平振动下土层复阻抗动力响应的解析解。将该解与等效单相解以及单相解进行了对比, 并阐明各解之间的关系, 指出可等效成等效单相解的条件。通过参数分析, 剖析了渗透系数、桩土模量比和桩长径比对土层阻抗的影响。

关键词: 饱和土; 水平振动; 等效单相解; 复阻抗因子

中图分类号: TU 435

文献标识码: A

Study of resistance factor of saturated soil caused by horizontal vibration of pile

YU Jun¹, SHANG Shou-ping², LI Zhong³, REN Hui²

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Central South University, Changsha 410075, China; 2. College of Civil Engineering, Hunan university, Changsha 410082, China; 3. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on Biot's consolidation equation, the characteristics of the resistance of soil caused by horizontal vibration of elastic bearing pile embedded in saturated soil are analytically studied. Transforming the consolidation equation, by virtue of differential operator splitting and variable separation method, the horizontal dynamical characteristics of soil under steady state of pile-soil interaction are obtained. The comparisons with the equivalent single-phase solution and the single-phase solution are presented; and the condition of the solution that can be equivalent to the equivalent single-phase solution is indicated. A parametric study is conducted to determine the main features of pile-soil interaction in horizontal vibration, the effects of the permeability coefficient, the pile-soil modulus ratio and the pile slenderness on resistance of soil layer are studied.

Key words: saturated soil; horizontal vibration; equivalent single-phase solution; impedance

1 引言

土介质中桩的水平振动问题在动力机器基础设计、建筑结构抗震中占有重要地位, 而土层的振动特性是研究桩土相互作用的重要因素。目前, 土层振动特性研究的主要方法有有限元、边界元方法, 连续介质方法和基于离散的黏弹性模型的动力 Winkler 地基梁方法。Tajimi 采用线性 Kelvin-Voigt 黏弹性土层模拟土, 忽略反应的竖向分量, 基于弹性连续理论求解土-桩动力相互作用^[1]。Novak 利用弹性半空间理论中的连续介质力学模型把土体视为连续、均匀、各向同性的弹性或黏弹性体, 采用平面应变条件, 从波动方程出发, 根据不同的边界

条件获得桩周土的力和位移表达式, 即土的阻抗函数^[2-3]。Nogami 和 Novak 对桩横向振动时土层反应推导了更精确的解, 在线性黏弹性介质中与 Tajimi 的方法类似, 这一解与平面应变假定的解相比, 理论上更加严密^[4-5]。Gazetas 基于平面应变模型和分象限假定分析了桩水平振动动力阻抗^[6]。

以上分析均是基于单相介质的, 实际上, 土是由多相介质构成的, 在桩土相互作用动力计算中, 用两相介质模型无疑要比单相模型更符合实际。Biot 建立了流体饱和多孔介质传播理论^[7-9], 该理论成为有关饱和多孔介质波动理论各项研究的基础。但由于问题的复杂性, 将土作为饱和两相介质来分析桩土水平动力相互作用的文献还很少。杨峻

用积分变换方法分析了轴对称条件下部分饱和和半空间在表面稳态激振时的响应^[10]。张玉红等^[11]用积分变换及刚度矩阵法分析了层状饱和土中三维非轴对称稳态响应。杨军等将适用于单相土-桩系统的 Novak 的平面应变假设和 Gazetas 的分象限假设推广到饱和土-桩系统中, 得到了桩在饱和土中水平振动的辐射阻尼简化算法^[12]。

本文在前人的基础上, 从饱和土动力固结理论出发, 用解析方法研究端承桩在饱和土的水平简谐振动时引起土层复阻抗特性, 在理论研究及工程实践中均有一定意义。

2 数学模型与基本假定

当桩土系统做水平振动时, 土体和流体的竖向位移较小, 忽略土体和流体竖向位移的土体运动方程可写成如下形式^[13]:

$$G\nabla^2 u_r + (\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{G}{r^2} \left(2 \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) - \alpha \frac{\partial p_f}{\partial r} + G \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} = \rho \ddot{u}_r + \rho_f \ddot{w}_r \quad (1)$$

$$G\nabla^2 u_\theta + (\lambda + G) \frac{1}{r} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{G}{r^2} \left(u_\theta - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) - \alpha \frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial \theta} + G \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = \rho \ddot{u}_\theta + \rho_f \ddot{w}_\theta \quad (2)$$

流体的运动方程为

$$-\frac{\partial p_f}{\partial r} = \frac{1}{k'_d} \dot{w}_r + \rho_f \ddot{u}_r + \frac{\rho_f}{n} \ddot{w}_r \quad (3)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial \theta} = \frac{1}{k'_d} \dot{w}_\theta + \rho_f \ddot{u}_\theta + \frac{\rho_f}{n} \ddot{w}_\theta \quad (4)$$

土体的渗流连续方程为

$$M \left(\frac{\partial \dot{w}_r}{\partial r} + \frac{\dot{w}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{w}_\theta}{\partial \theta} \right) + \alpha M \left(\frac{\partial \dot{u}_r}{\partial r} + \frac{\dot{u}_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}_\theta}{\partial \theta} \right) = -\dot{p}_f \quad (5)$$

式中: u_r 、 u_θ 分别为土骨架径向、切向和轴向位移; w_r 、 w_θ 为流体相对土骨架的径向、切向和轴向位移; ρ 、 ρ_s 、 ρ_f 分别为两相介质、土骨架和流体的质量密度, 且有 $\rho = (1-n)\rho_s + n\rho_f$, n 为土体的孔隙率; λ 、 G 为 Lamé 常数; p_f 为超静孔隙水压力; k'_d 为土的动力渗透系数, $k'_d = k_d/(\rho_f g)$, g 为重力加速度; $e = \partial u_r / \partial r + u_r / r + \partial u_z / \partial z$ 为土骨架的体积应变; $\nabla^2 = \partial^2 / \partial r^2 + \partial / (r \partial r) + \partial^2 / (r^2 \partial \theta^2)$ 为

Laplace 算子; $\alpha = 1 - K_b / K_s$, $1/M = (1-n)/K_s + n/K_f$, K_s 、 K_f 、 K_b 分别为土颗粒、流体及土骨架的体积模量。

本文研究的是饱和土中端承桩受水平简谐荷载激振作用时的桩土水平振动耦合问题见图 1。假设桩周土为均质, 各向同性的两相弹性介质, 底部为刚性; 桩土振动为小变形, 桩土之间完全接触, 不发生滑移和脱离, 且桩土表面不透水。假设桩身沿 $\theta = 0$ 方向产生水平位移为 $u_1 e^{i\omega t}$, 由接触条件可知, 土层在半径为 r_0 的圆孔壁沿 $\theta = 0$ 的方向的水平位移也为 $u_1 e^{i\omega t}$ 。于是, 薄层在圆孔壁处的边界条件为

$$u_r(r_0, \theta, z, t) = u_1 e^{i\omega t} \cos \theta \quad (6)$$

$$u_\theta(r_0, \theta, z, t) = -u_1 e^{i\omega t} \sin \theta \quad (7)$$

在无限远处, 位移衰减为 0, 有:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u_r(r, \theta, z, t) = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} u_\theta(r, \theta, z, t) = 0 \quad (8)$$

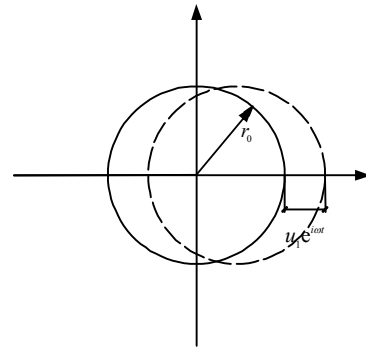


图 1 薄层的水平振动

Fig.1 Horizontal vibration of layer

3 方程的求解

进行 $\frac{\partial(1)}{\partial r} + \frac{(1)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(2)}{\partial \theta}$ 的运算, 可得:

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 e - \nabla^2 p_f + G \frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = \rho \ddot{e} + \rho_f \ddot{\zeta} \quad (9)$$

其中: $\zeta = \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{w_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta}$

进行 $\frac{\partial(4)}{\partial r} + \frac{(4)}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(5)}{\partial \theta}$ 运算, 得到:

$$-\nabla^2 p_f = \frac{1}{k'_d} \dot{\zeta} + \rho_f \ddot{e} + \frac{\rho_f}{n} \ddot{\zeta} \quad (10)$$

又由式 (5), 有:

$$\alpha M \dot{e} + M \dot{\zeta} = -\dot{p}_f \quad (11)$$

联系式 (9) ~ (11), 可有:

$$(\lambda + 2G)\nabla^2 e + (\rho_f \alpha - \rho)\ddot{e} - \nabla^2 p_f + \frac{\rho_f}{M}\ddot{p}_f + G\frac{\partial^2 e}{\partial z^2} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\alpha}{k'_d}\dot{e} - \rho_f\ddot{e} + \frac{\rho_f}{n}\alpha\ddot{e} - \nabla^2 p_f + \frac{\rho_f}{Mn}\ddot{p}_f + \frac{1}{Mk'_d}\dot{p}_f = 0 \quad (13)$$

由式 (13) 可知, p_f, e 含有相同的 z 函数表达式, 可以写成如下形式:

$$e = e^*(r, \theta, z)W(z), \quad p_f = p_f^*(r, \theta, z)W(z) \quad (14)$$

代入式 (12)、(13) 中, 由于是稳态简谐振动, 分离变量并写成矩阵形式, 可有:

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 2G)\nabla^2 - (\rho_f \alpha - \rho)\omega^2 + Gh_1^2 & -\nabla^2 - \frac{\rho_f}{M}\omega^2 \\ \frac{i\alpha\omega}{k'_d} + \rho_f\omega^2 - \frac{\rho_f}{n}\alpha\omega^2 & -\nabla^2 - \frac{\rho_f\omega^2}{Mn} + \frac{i\omega}{k'_dM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^* \\ p_f^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\text{其中:} \quad h_1^2 = \frac{1}{W} \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \quad (16)$$

由式 (15), 可以解得:

$$W = A_1 e^{h_1 z} + B_1 e^{-h_1 z} \quad (17)$$

由底部为刚结边界条件, 可有:

$$A_1 - B_1 = 0 \text{ 且 } h_1 = i \frac{(2n-1)\pi}{2H} = h_n, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (18)$$

同理可有:

$$u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \text{ch}(h_n z) \quad (19)$$

要使方程 (15) 有非 0 解, 必须算子行列式等于 0, 故此有:

$$\nabla^4 - d_1 \nabla^2 + d_2 = 0 \quad (20)$$

式中:

$$d_1 = \frac{(\rho_f \alpha - \rho)\omega^2 - Gh_1^2 + \left[\frac{i\alpha\omega}{k'_d} + \rho_f\omega^2 - \frac{\rho_f}{n}\alpha\omega^2 \right]}{\lambda + 2G} - \left(\frac{\rho_f}{Mn}\omega^2 - \frac{i\omega}{k'_dM} \right)$$

$$d_2 = - \frac{[(\rho_f \alpha - \rho)\omega^2 - Gh_1^2] \left[\frac{\rho_f}{Mn}\omega^2 - \frac{i\omega}{k'_dM} \right]}{\lambda + 2G} +$$

$$\frac{\rho_f}{M}\omega^2 \left(\frac{i\alpha\omega}{k'_d} + \rho_f\omega^2 - \frac{\rho_f}{n}\alpha\omega^2 \right) / (\lambda + 2G)$$

式 (20) 可以分解成:

$$(\nabla^2 - g_2^2)(\nabla^2 - g_4^2) = 0 \quad (21)$$

$$\text{式中: } g_{2,4}^2 = (d_1 \pm \sqrt{d_1^2 - 4d_2}) / 2$$

由算子分解理论^[14], 有:

$e^* = e_1^* + e_2^*$, 其中 e_1^*, e_2^* 分别满足下式:

$$\begin{cases} (\nabla^2 - g_2^2)e_1^* = 0 \\ (\nabla^2 - g_4^2)e_2^* = 0 \end{cases} \quad (22)$$

通过分离变量法求方程解为

$$e_1^* = e^{i\omega t} [C_1 \sin(N_1 \theta) + D_1 \cos(N_1 \theta)] \cdot [E_1 K_{N_1}(g_2 r) + F_1 I_{N_1}(g_2 r)] \quad (23)$$

$$e_2^* = e^{i\omega t} [C_2 \sin(N_2 \theta) + D_2 \cos(N_2 \theta)] \cdot [E_2 K_{N_2}(g_4 r) + F_2 I_{N_2}(g_4 r)] \quad (24)$$

式中: $I_{N_1}(g_1 r)$ 、 $I_{N_2}(g_2 r)$ 、 $K_{N_1}(g_4 r)$ 、 $K_{N_2}(g_4 r)$ 分别为第 1 类、第 2 类变型 Bessel 函数。

由式 (6)、(7) 可知:

$$N_1 = 1, \quad C_1 = C_2 = 0, \quad F_1 = F_2 = 0 \quad (25)$$

整合常数项, 以下各式均为级数和形式, 为方便起见, 仍记成普通单项形式, 有:

$$e = e^{i\omega t} \text{ch}(h_n z) \cos \theta [A_1 K_1(g_2 r) + A_2 K_1(g_4 r)] \quad (26)$$

同理可以得到:

$$p_f = e^{i\omega t} \text{ch}(h_n z) \cos \theta [A_3 K_1(g_2 r) + A_4 K_1(g_4 r)] \quad (27)$$

由于式 (12) 和式 (13) 为耦合方程, 本身具有相关性, 将方程解 (26) 和 (27) 代入式 (12) 和式 (13), 可以得到:

$$p_f = e^{i\omega t} \text{ch}(h_n z) \cos \theta [\lambda_1 A_1 K_1(g_2 r) + \lambda_2 A_2 K_1(g_4 r)] \quad (28)$$

其中:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\lambda + 2G)g_i^2 - (\rho_f \alpha - \rho)\omega^2 + Gh_n^2}{g_i^2 + \frac{\rho_f}{M}\omega^2}, \quad i = 2, 4$$

可以将式 (3) 及式 (4) 改写成下式:

$$w_r = \eta \left(\rho_f \omega^2 u_r - \frac{\partial p_f}{\partial r} \right) \quad (29)$$

$$w_0 = \eta \left(\rho_f \omega^2 u_0 - \frac{1}{r} \frac{\partial p_f}{\partial \theta} \right) \quad (30)$$

其中: $1/\eta = i\omega/k'_d - \rho_f \omega^2/n$

可以设 u_r, u_θ 有如下解形式:

$$u_r = \bar{u}_r \cos \theta, \quad u_\theta = \bar{u}_\theta \sin \theta \quad (31)$$

将式 (29) ~ (31) 代入式 (1)、(2) 中, 分别将两式相加、相减, 并将 e, p_f 表达式代入, 可以得到:

$$\begin{aligned} G \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\bar{u}_r + \bar{u}_\theta) + G \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\bar{u}_r + \bar{u}_\theta) + \frac{G}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u}_r + \bar{u}_\theta) - \\ \frac{4G}{r^2} (\bar{u}_r + \bar{u}_\theta) + (\rho \omega^2 + \rho_f^2 \omega^4 \eta) (\bar{u}_r + \bar{u}_\theta) = [(\lambda + G) - \\ \lambda_1 (\rho_f \omega^2 \eta + 1)] A_1 \text{ch}(h_n z) g_2 K_2(g_2 r) + [(\lambda + G) - \\ \lambda_2 (\rho_f \omega^2 \eta + 1)] A_2 \text{ch}(h_n z) g_4 K_2(g_4 r) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} G \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\bar{u}_r - \bar{u}_\theta) + G \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\bar{u}_r - \bar{u}_\theta) + \frac{G}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{u}_r - \bar{u}_\theta) + \\ (\rho \omega^2 + \rho_f^2 \omega^4 \eta) (\bar{u}_r - \bar{u}_\theta) = [(\lambda + G) - \lambda_1 (\rho_f \omega^2 \eta + 1)] \cdot \\ A_1 \text{ch}(h_n z) g_2 K_0(g_2 r) + [(\lambda + G) - \lambda_2 (\rho_f \omega^2 \eta + 1)] \cdot \\ A_2 \text{ch}(h_n z) g_4 K_0(g_4 r) \end{aligned} \quad (33)$$

式 (32) 为非齐次常微分方程, 其解为

$$\begin{aligned} (\bar{u}_r + \bar{u}_\theta) = e^{i\omega t} [A_6 e^{g_7 z} + B_6 e^{-g_7 z}] \cdot \\ [C_6 K_2(g_8 r) + D_6 I_2(g_8 r)] + \\ C A_1 \text{ch}(h_n z) K_2(g_2 r) + D A_2 \text{ch}(h_n z) K_2(g_4 r) \end{aligned} \quad (34)$$

其中:

$$\begin{aligned} g_7^2 + g_8^2 = \beta_3^2 \\ \beta_3^2 = -\frac{\rho \omega^2}{G} - \frac{\eta \rho_f^2 \omega^4}{G} \\ C = \frac{(\lambda + G) - \lambda_1 (\rho_f \omega^2 \eta + 1)}{G h_n^2 + G g_2^2 + \rho \omega^2 + \rho_f^2 \omega^4 \eta} g_2 \\ D = \frac{(\lambda + G) - \lambda_2 (\rho_f \omega^2 \eta + 1)}{G h_n^2 + G g_4^2 + \rho \omega^2 + \rho_f^2 \omega^4 \eta} g_4 \end{aligned}$$

由式 (8) 及底部为刚性的边界条件, 可有:

$$D_6 = 0, \quad A_6 - B_6 = 0 \quad (35)$$

同理可以得到:

$$\begin{aligned} (\bar{u}_r - \bar{u}_\theta) = \text{ch}(h_n z) [C A_1 K_0(g_2 r) + \\ D A_2 K_0(g_4 r) + A_7 K_0(g_{10} r)] \end{aligned} \quad (36)$$

由式 (34) ~ (36) 并相应地取

$$g_{2n} = g_2, \quad g_{4n} = g_4, \quad g_{6n} = g_8 = g_{10}, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (37)$$

可以得到:

$$\begin{aligned} u_r = e^{i\omega t} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \text{ch} g_n z \left[C A_{1n} \frac{K_2(g_{2n} r) + K_0(g_{2n} r)}{2} + \right. \\ \left. D A_{2n} \frac{K_2(g_{4n} r) + K_0(g_{4n} r)}{2} + A_{6n} \frac{K_2(g_{6n} r) - K_0(g_{6n} r)}{2} \right] \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} u_\theta = e^{i\omega t} \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \text{ch} g_n z \left[C A_{1n} \frac{K_2(g_{2n} r) - K_0(g_{2n} r)}{2} + \right. \\ \left. D A_{2n} \frac{K_2(g_{4n} r) - K_0(g_{4n} r)}{2} + A_{6n} \frac{K_2(g_{6n} r) + K_0(g_{6n} r)}{2} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} w_r = e^{i\omega t} \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} \text{ch} g_n z \left[(C \eta \rho_f \omega^2 + \lambda_1 \eta g_{2n}) A_{1n} \cdot \right. \\ \left. \frac{K_2(g_{2n} r) + K_0(g_{2n} r)}{2} + (D \eta \rho_f \omega^2 + \lambda_2 \eta g_{4n}) A_{2n} \cdot \right. \\ \left. \frac{K_2(g_{4n} r) + K_0(g_{4n} r)}{2} + \frac{\eta \rho_f \omega^2 A_{6n} K_1(g_{6n} r)}{g_{6n} r} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

这里有 3 个待定常数 A_{1n} 、 A_{2n} 、 A_{6n} , 由式 (6)、(7)、(19) 以及桩土表面不透水可以得到 3 个方程, 将 A_{1n} 、 A_{2n} 、 A_{6n} , 均表示为 U_n 的表达式, 写成矩阵形式如下:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{1n} \\ A_{2n} \\ A_{6n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_n \\ 0 \\ -U_n \end{bmatrix} \quad (41)$$

其中:

$$\begin{aligned} a_{11} &= C \frac{K_2(g_{2n} r_0) + K_0(g_{2n} r_0)}{2}, \\ a_{12} &= D \frac{K_2(g_{4n} r_0) + K_0(g_{4n} r_0)}{2}, \\ a_{13} &= \frac{K_2(g_{6n} r_0) - K_0(g_{6n} r_0)}{2}, \\ a_{21} &= (C \eta \rho_f \omega^2 + \lambda_1 \eta g_{2n}) \frac{K_2(g_{2n} r_0) + K_0(g_{2n} r_0)}{2}, \\ a_{22} &= (D \eta \rho_f \omega^2 + \lambda_2 \eta g_{4n}) \frac{K_2(g_{4n} r_0) + K_0(g_{4n} r_0)}{2}, \\ a_{23} &= \eta \rho_f \omega^2 \frac{K_2(g_{6n} r_0) - K_0(g_{6n} r_0)}{2}, \\ a_{31} &= C \frac{K_2(g_{2n} r_0) - K_0(g_{2n} r_0)}{2}, \\ a_{32} &= D \frac{K_2(g_{4n} r_0) - K_0(g_{4n} r_0)}{2}, \\ a_{33} &= \frac{K_2(g_{6n} r_0) + K_0(g_{6n} r_0)}{2}. \end{aligned}$$

可以求得:

$$A_{1n} = B_1 U_n, A_{2n} = B_2 U_n, A_{6n} = B_3 U_n \quad (42)$$

其中:

$$B_1 = (a_{22}a_{33} + a_{22}a_{13} - a_{12}a_{23} - a_{23}a_{32}) / (a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{11}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23})$$

$$B_2 = (-a_{21}a_{33} - a_{21}a_{13} + a_{31}a_{23} + a_{11}a_{23}) / (a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{11}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23})$$

$$B_3 = (-a_{31}a_{22} + a_{21}a_{12} + a_{21}a_{32} - a_{11}a_{22}) / (a_{21}a_{32}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{11}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23})$$

可以证明,薄层圆孔处单位土层厚度的径向应力 σ_r 和切向应力 $\tau_{r\theta}$ 的合力通过圆孔中心。约定合力 q_h 的作用方向与运动方向一致时为正,则:

$$q_h = - \int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) \Big|_{r=r_0} r_0 d\theta \quad (43)$$

可得到:

$$q_h = G e^{i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \text{ch}(g_n z) A_n U_n \quad (44)$$

其中:

$$A_n = \pi r_0 [2Cg_{2n}K_1(g_{2n}r_0)B_1 + 2Dg_{4n}K_1(g_{4n}r_0)B_2 - g_{6n}K_1(g_{6n}r_0)B_3 + \frac{(\lambda_1 - \lambda)}{G}K_1(g_{2n}r_0)B_1 + \frac{(\lambda_2 - \lambda)}{G}K_1(g_{4n}r_0)B_2]$$

由土层沿桩周应力幅值 q_h 表达式 (44) 可以看出,桩上耦合作用时土层产生的抗力主要取决于两方面因素,一方面由土层自振特性决定,即土层的剪切模量、泊松比、长径比等因素;另一方面,则是由桩对土层的耦合作用决定,此作用由式 (44) 中的系数式 A_n 反映。下面通过定义的土层阻抗因子来着重探讨各参数对土层动力反应特性的影响。令土层阻抗因子为 γ , 定义如下:

$$q_h = -\gamma u_1 \quad (45)$$

第 n 个振动模态的阻抗因子可以写成:

$$\gamma_n = \pi G \gamma'_n \quad (46)$$

这里 γ'_n 为无量纲阻抗因子,定义如下:

$$\gamma'_n = \frac{A_n}{\pi} \quad (47)$$

阻抗因子是一个复数,实部和虚部分别代表土层动力反应的刚度和阻尼部分,两者取决于土层的剪切模量、泊松比、激振频率、模态阶数、桩长径比。

将上述土层阻抗解与桩振动方程联系,并结合边界条件等,可以得到桩土相互作用体系下桩顶阻抗函数的解析表达式,在这里暂不作讨论。

4 与其他解对比

从以上分析可知,本文基于 Biot 动力固结方程,通过较严格的解析求解,得到了饱和土层中桩水平振动下桩顶动力阻抗的解析表达式。将本文得到的饱和土在水平振动下的动力响应退化到单相,即得到和文献[4]单相土层完全相同的解,也就是说 Nogami 单相土层解即本文解退化到单相土层的特解。已有的研究给出了当动力渗透系数趋于 0 和趋于无穷大时饱和土层中波振动结果^[15]。当饱和土层中孔隙流体无渗流的情况下,如饱和黏土等封闭系统时, k'_d 趋近于 0, 即得封闭系统情况下只有一个 P 波和一个 S 波作用,且有 $V_s = \sqrt{G/\rho}$ 、 $V_p = \sqrt{(\lambda + 2G + k'_f/n)/\rho}$, 即可认为此时饱和土层可等效为压缩波速与剪切波速等于由上式确定的 V_p 、 V_s 的单相土层。值得注意的是,等效的单相土层波松比 $\nu_s = (V_p^2 - 2V_s^2)/[2(V_p^2 - V_s^2)]$, 趋近于 0.5。当渗透系数趋于无穷大时,饱和土中存在 3 种波,即压缩波 P_1 、 P_2 和剪切波 S。

图 2 为是无量纲阻抗因子 γ'_n 随模态阶数和频率比 a_1 的变化情况。频率比取为激振频率与土层第一阶固有频率之比。即:

$$a_1 = \frac{\omega}{\omega_g}, \text{ 其中 } \omega_g = \frac{V_s}{2H} (2n-1)\pi, n=1, 2, 3 \dots \quad (48)$$

这里取 $n=1$, 即第一阶固有频率。

从图 2 可以看出,土层振动存在着无数个振动模态,土层的阻抗作用是由无数个单独的模态共同叠加作用的结果。刚度部分最小处即为其共振频率,随着阶数的增高,共振频率增大,共振点的阻抗幅值基本上保持不变。阻尼部分在共振点以下时,基本上趋于 0,表现出与激振频率无关的性质,这主要是由于此时土阻尼能量辐射较小。并且阶数越高,阻尼部分共振点越大。

从图 2 中还可以看出,当渗透系数为 $k'_d = 10^{-12}$ 时,本文解中的土层阻抗刚度因子和阻尼因子同等效单相解基本重合。当动力渗透系数较大 $k'_d = 10^{-2}$ 时,在频率较小时,饱和土层阻抗因子和单项土层解基本一致,当频率较大时,两解有较大差别,相对单相土层解而言,随着频率的增大,饱和土层阻抗因子减小。这是因为,随着频率的增大,饱和土中流体的惯性项影响逐渐增大,致使土层刚度因子

减小, 这在实际工程分析中是个值得注意的现象, 这说明, 当动力渗透系数较大时, 不能用单项土层解来替代饱和土层解, 必须考虑土中流体的影响。

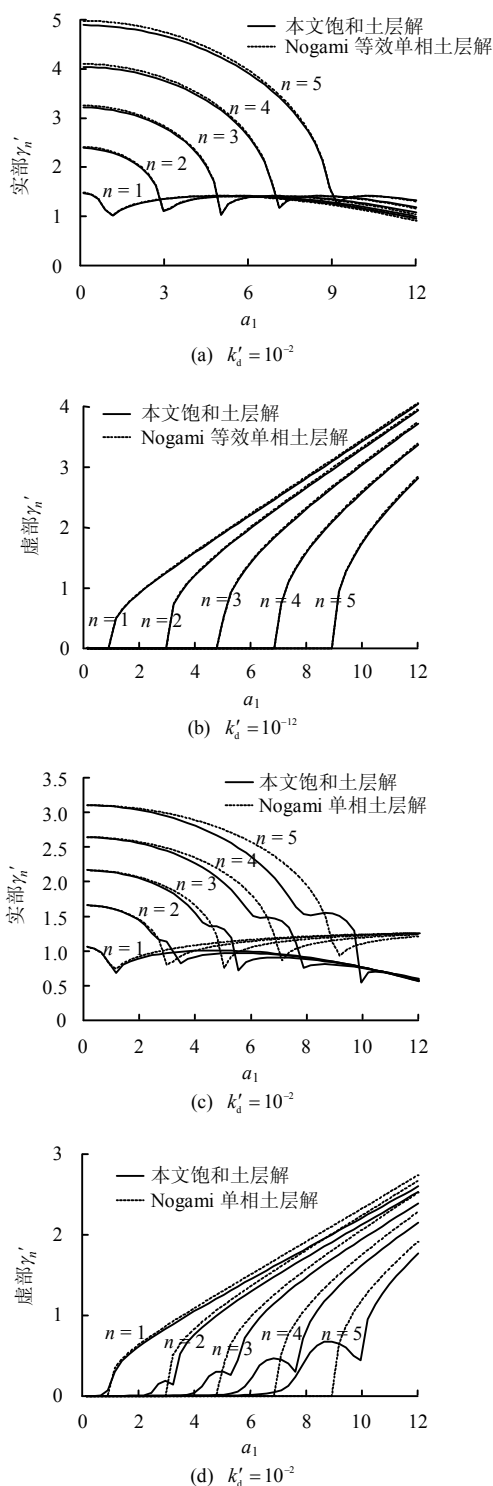


图 2 与等效单相土层解对比

Fig.2 Contrast with equivalent single-phase solution

5 参数分析

下面依据以上推导的公式, 给出参数分析的结果, 计算参数包括饱和土和桩的基本参数, 若无特

殊说明, 所用的参数按照以下选取: $E_p = 25.5 \text{ GPa}$, $\rho_p = 2500 \text{ kg/m}^3$, $\rho_s = 2700 \text{ kg/m}^3$, $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$, $\alpha = 1$, $n = 0.375$, $k_d = 0.01 \text{ m/s}$, $\nu_s = 0.25$ 。

从图 3 中可以看出, 渗透系数对阻抗因子有较大影响。随着渗透系数的减小, 刚度因子与阻尼因子均增大, 当动力渗透系数小于 10^{-7} 时, 本文解基本等效单相解相差已不大, 当渗透系数在大于 10^{-4} 变化时, 阻抗因子基本不变。也就是说, 当渗透系数小于 10^{-7} , 基本上可以用等效单相解来替代本文解; 当渗透系数大于 10^{-4} 时, 基本上可以按照渗透系数趋于无穷大来考虑。在频率较低时, 渗透系数大于 10^{-4} 得到的饱和土解和单相解基本一致, 但当频率较高时, 由于土中流体影响, 阻抗因子减小, 已不能将其简化为单相土来考虑。

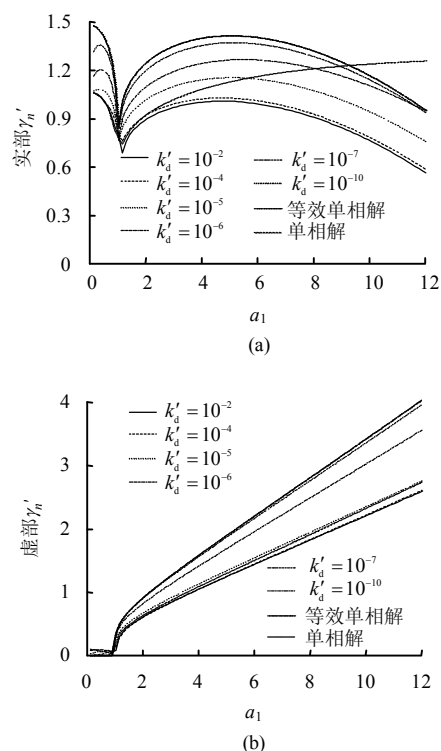


图 3 动力渗透系数对土层振动阻抗因子 γ'_n 影响

Fig.3 Effects of permeability coefficient on resistance factor

图 4 体现的是土剪切模量对土层阻抗因子的影响。从中可以看出, 土剪切模量对土层阻抗因子影响较小, 在频率较低时, 基本无影响, 当频率较高时, 随着剪切模量的增大, 阻抗因子减小, 但减小的幅度不大。

从图 5 中可以看出, 长径比对阻抗因子影响较大。在较低频率时, 基本上随着长径比的增大, 刚度因子, 阻尼因子均减小, 但在较高的频率时, 随着频率的增大, 刚度因子反而减小, 长径比较小的

减小更为剧烈, 所以到一定频率之后, 长径比较小的土层阻抗刚度因子更小。当桩长径比在大于 80 变化时, 阻抗因子变化已经较小, 可以认为, 当桩长径比大于 80 时, 再增加桩长对阻抗因子已经没有影响。

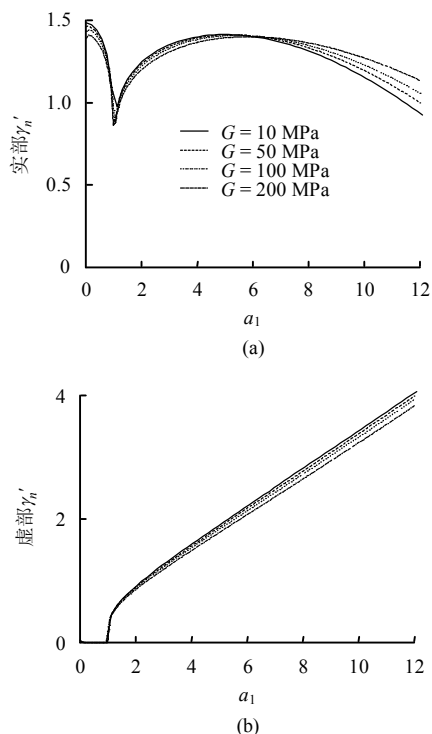


图 4 剪切模量对土层振动阻抗因子 γ'_n 影响

Fig.4 Effects of G on resistance factor of soil layer

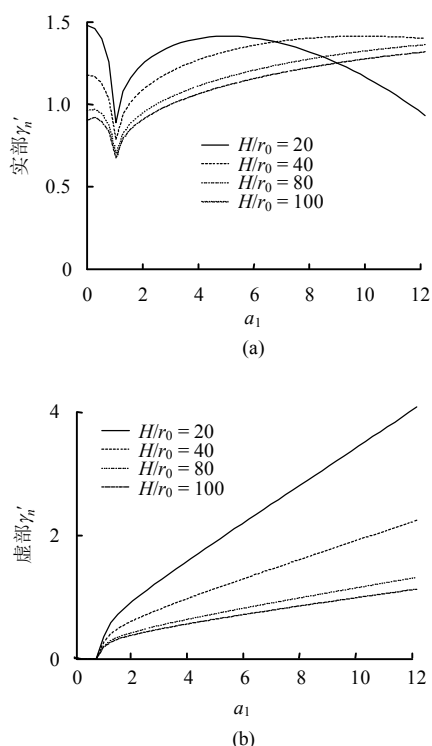


图 5 长径比对土层振动阻抗因子 γ'_n 影响

Fig.5 Effects of pile slenderness on resistance factor

6 结 论

(1) 基于 Biot 动力固结方程, 对动力方程进行变形, 采用算子分解及分离变量法结合桩土耦合条件得到了饱和土中端承桩水平振动引起土层阻抗的解析解, 联系到桩振动方程, 可以得到桩土相互作用桩顶阻抗函数。

(2) 将本文解与文献解进行对比表明, 当动力渗透系数小于 10^{-7} 时, 即可将饱和土按压缩波速与剪切波速等效的单相土层来计算。当渗透系数大于 10^{-4} 时, 饱和土动力阻抗可按渗透系数趋于无穷大来计算。但渗透系数在大于 10^{-7} 小于 10^{-4} 变化时, 随着渗透系数的增大, 动力阻抗减小。

(3) 综合分析了桩土模量比、桩长径比对饱和土层阻抗因子的影响。桩土模量比对土层阻抗因子影响较小。当桩长径比大于 80 时, 土层阻抗因子基本不随长径比的增大而变化。

参 考 文 献

- [1] TAJIMI H. Dynamic Analysis of a structure embedded in an Elastic Stratum[C]//Proceedings of 4th World Conference on Earthquake Engineering. Santiago: [s. n.], 1992: 53—59.
- [2] NOVAK M, ABOUL E F. Dynamic stiffness and damping of piles[J]. *Canadian Geotechnical Journal*, 1974, 11(4): 574—598.
- [3] NOVAK M, ABOUL E F. Impedence Functions of pile in layered media[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 1978, 104(6): 643—669.
- [4] NOGAMI T, NOVAK M. Resistance of soil to a horizontally vibrating pile[J]. *Earthquake Engineering and Structure Dynamic*, 1977, 5(2): 249—261.
- [5] NOVAK M, NOGAMI T. Soil-Pile interaction in Horizontal Vibration[J]. *Earthquake Engineering and Structure Dynamic*, 1977, 5(2): 263—281.
- [6] GAZETAS G, DOBRY R. Horizontal response of piles in layered soils[J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 1984, 110(1): 20—40.
- [7] BIOT M A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous soil: I. Low-frequency range[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, 28(2): 168—178.
- [8] BIOT M A. The theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous soil: II. Higher-frequency range[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 1956, 28(2): 179—191.

- [9] BIOT M A. Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media[J]. **The Journal of the Acoustical Society of America**, 1962, 34(9): 1254—1264.
- [10] 杨峻, 吴世明. 非均质流固耦合介质轴对称动力问题时域解[J]. 力学学报, 1996, 28(3): 308—318.
YANG Jun, WU Shi-ming. Transient solutions of axisymmetric dynamic problem for inhomogeneous two phase media[J]. **Acta Mechanica Sinica**, 1996, 28(3): 308—318.
- [11] 张玉红, 黄义. 两相介质饱和土三维非轴对称稳态响应分析[J]. 应用力学学报, 2002, 19(3): 85—89.
ZHANG Yu-hong, HUANG Yi. Stable response of the 3-D non-axisymmetric two-phase water-saturated soil[J]. **Chinese Journal of Applied Mechanics**, 2002, 19(3): 85—89.
- [12] 杨军, 宋二祥, 陈肇元. 桩在饱和土中水平振动的辐射阻尼简化算法[J]. 岩土力学, 2004, (4): 179—183.
YANG Jun, SONG Er-xiang, CHEN Zhao-yuan. Simple radiation damping model for horizontally vibration pile in saturated soil[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 23(2): 179—183.
- [13] KASSIR M K. Rotatory and horizontal vibrations of a circular surface footing on a saturated elastic half-space[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1996, 33(2): 265—281.
- [14] PHILIPPACOPOULOS A J. Lamb's problem for fluid-saturated porous media[J]. **Bulletin of the Seismological Society of America**, 1988, 78(6): 908—923.
- [15] 吴世明. 土动力学[M]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2000.